TD Nombres complexes

Formes algébrique et exponentielle

BH6 **Exercice 1** Identité du parallélogramme Soit $z, z' \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.
2. Représenter graphiquement les points $O(0), A(z), B(z'), C(z+z')$ et le vecteur d'affixe $z - z'$.
   Interpréter géométriquement l'identité précédente.

99P **Exercice 2** Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ des nombres complexes.

1. Montrer que
$$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\Big|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + 2 \sum_{1 \le k < \ell \le n} \mathrm{Re}(z_k \overline{z_\ell}).$$
   Que retrouve-t-on si $\forall i, z_i \in \mathbb{R}$?
2. On suppose les z_k non nuls et on pose $z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$, où $\rho_k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_k \in [0,2\pi[$. Montrer que
$$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k\Big|^2 = \sum_{k=1}^{n} \rho_k^2 + 2 \sum_{k<\ell} \rho_k \rho_\ell \cos(\theta_k - \theta_\ell).$$
3. En déduire que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|$. Donner une CNS pour que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

T9R **Exercice 3** Que dire de nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_{2023} \in \mathbb{C}$, qui soient tous des racines 2023-ièmes de l'unité et vérifient
$$\sum_{i=1}^{2023} \lambda_i = 2023 \quad ?$$

G7R **Exercice 4** Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$.

Indication : *Considérer* $(1+i)^{2n}$.

PN7 **Exercice 5**

1. Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que $|z| = \sup\limits_{\theta \in \mathbb{R}} \mathrm{Re}\left(z e^{i\theta}\right)$.
2. Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ des nombres complexes de parties réelles et imaginaires positives. Montrer que
$$|z_1 + \cdots + z_n| \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \big(|z_1| + \cdots + |z_n|\big).$$

YW9 **Exercice 6** Soit $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Montrer que l'application $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ réalise une bijection de P sur D.

PUP **Exercice 7** ★ [X] Soit $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, d'arguments $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$.

1. Montrer que
$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} |z_k|\, |\cos(\theta_k - \theta)| = \sup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \Big|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k\Big|.$$
   Indication : *On admettra que la borne supérieure de gauche est atteinte (théorème lié à la continuité).*
2. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \le \frac{\pi}{2} \sup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \Big|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k\Big|.$$
   Indication : $\frac{2}{\pi}$ *est la valeur moyenne de* $|\cos|$.
3. Montrer que la constante $\frac{\pi}{2}$ est optimale.

Nombres $e^{i\theta}$

F9P **Exercice 8** Mettre sous forme pseudo-exponentielle les complexes suivants.

1. $\frac{1-e^{ix}}{1+e^{ix}}$
2. $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}$
3. $\frac{1+i\tan x}{1-i\tan x}$

A4P **Exercice 9** Résoudre l'équation

1. $z^6 + 1 = 0$
2. $(z+1)^4 = z^4$
3. $1 + z^n + z^{2n} = 0$
4. $z^4 = z + \overline{z}$

Indication : *Se ramener à des racines* n*-ièmes de …*.

92Z **Exercice 10** Déterminer les nombres complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ aient le même module.

CD3 **Exercice 11** Soient $z, z' \in \mathbb{U}$, avec $zz' \neq -1$. Montrer que
$$\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}.$$

XI2 **Exercice 12** ★ ★ [ENS] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la somme μ_n des racines primitives n-ièmes de l'unité.

Indication : *Appliquer le principe d'inclusion-exclusion.*

Équations du second degré

OU5 **Exercice 13** Factoriser le polynôme suivant sur $\mathbb{C}$.

1. $z^3 + (i+1)z^2 + (i+1)z + 1$
   Indication : *Commencer par trouver une racine évidente.*
2. $z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

YBW **Exercice 14** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $z^4 + 2\cos\theta z^2 + 1 = 0$.

XYM **Exercice 15** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $(z^2+1)^n - (z+i)^{2n} = 0$.

Trigonométrie

VTW **Exercice 16** Soit $\theta = \frac{2\pi}{5}$ et $\omega = e^{i\theta}$. En écrivant $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$, montrer que $1 + 2\cos\theta + 2\cos(2\theta) = 0$. En déduire $\cos\theta$.

ZJJ **Exercice 17** Calculer $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$.

SJT **Exercice 18** Calculer

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$
2. $\sum_{k=0}^{n} \cos(x+ky)$
3. $\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(kx)$
4. $\sum_{k=0}^{n} \sin\frac{\pi}{2^k} \sin\frac{3\pi}{2^k}$

JIT **Exercice 19** Factoriser

1. $-\sqrt{3}\cos t + \sin t$
2. $\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2)$

YR9 **Exercice 20** Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)\,\mathrm{d}t$.

Géométrie

EW9 **Exercice 21** Trouver les nombres complexes z tels que les points d'affixes

1. z, z^2 et z^3 soient alignés.
2. z, z^2 et z^4 forment un triangle rectangle en z.
   Indication : *Se contenter d'une équation reliant x et y, qui décrit une hyperbole.*
3. $1, z$ et iz soient alignés.

MD3 **Exercice 22** Donner sans justification la description géométrique de l'application $z \mapsto iz + 2$.

WL6 **Exercice 23** Soient A, B deux points distincts du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère orthonormé dans lequel $A = (-a, 0)$ et $B = (a, 0)$, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M tels que $M = A, M = B$, ou $\mathrm{Angle}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta[\pi]$.

1. On note z l'affixe de M. Montrer que $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $(z-a)(\overline{z}+a)e^{-i\theta} \in \mathbb{R}$.
2. On pose $z = x + iy$. Déduire de la question précédente une équation de $\mathcal{C}$ de la forme $(x^2+y^2)\sin\theta + \cdots = 0$.
3. En déduire que si $\theta \not\equiv 0[\pi]$, $\mathcal{C}$ est un cercle. Préciser son centre et son rayon.

WP8 **Exercice 24** Soient $a, b, c \in \mathbb{U}$ tels que $a + b + c = 0$. Que dire du triangle formé par les points images ?

Indication : *Traduire l'hypothèse $a + b + c = 0$ géométriquement, ou se ramener au cas où $a = 1$.*

W6C **Exercice 25** Caractérisations des triangles équilatéraux Soient A, B, C trois points distincts du plan, d'affixes a, b, c.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

G7D **Exercice 26** ★

1. Soit $z_1, \ldots, z_n$ les sommets d'un n-gone régulier. Montrer que la famille $\big(z_i + (z_{i+2} - z_{i+1})\big)_{1 \leq i \leq n}$ forme un n-gone régulier.
2. Montrer que pour $n \geq 5$, il n'existe pas de n-gone régulier dont les sommets sont à coordonnées entières. Qu'en est-il des cas $n = 4$ et $n = 3$?

Analyse

OL8 **Exercice 27** Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x+ia}$.

P9P **Exercice 28** Soit $a \in \mathbb{C}$. Déterminer les solutions complexes de l'équation $e^z = a$.

RD3 **Exercice 29** Soit $\theta \not\equiv 0[\pi]$.

1. En considérant la quantité $\sin\big((n+1)\theta\big)$, montrer que si la suite $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il en va de même de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire une contradiction.

GUH **Exercice 30**

1. Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
2. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes, et $r \geq 0$.
   a) Calculer, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{i\theta})e^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
   b) Justifier l'existence de $\sup\limits_{z\in\mathbb{U}} |P(z)|$. Montrer que $\max\limits_{i\in[\![0,n]\!]} |a_i| \leq \sup\limits_{z\in\mathbb{U}} |P(z)|$.

NJM **Exercice 31** ★ Montrer qu'il n'est pas possible de partitionner le plan $\mathbb{R}^2$ en une réunion disjointe de cercles de rayon strictement positif.

KM8 **Exercice 32** ★ Étudier, en fonction du premier terme $u_0 \in \mathbb{C}$, la convergence d'une suite (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$.